تکه دوزی در هندسه!

دکتر محرم نژاد ایرد موسی
عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

حتماً با هنر تکه‌دوزی و نمونه‌های زیبایی از آن برخورد داشته‌اید. هنری اقتصادی که در آن از پارچه‌های دورریز استفاده می‌کنند و از کنار هم قرار دادن و دوختن آنها، پارچه‌ای غالباً با نام **چهل تیکه** تهیه می‌کنند.

شکل ۱

در هندسه، این بریدن و دوختن (کنار هم قراردادن و چینش مجدد) یک شکل هندسی در $\mathbb{R}^2$ و تبدیل کردن آن به یک شکل هندسی دیگر، قدمتی طولانی دارد. به عنوان مثال معمای زیر در یک کتاب قدیمی ژاپنی که در سال ۱۷۲۷ چاپ شده است به رشتهٔ تحریر درآمده است:

مثال ۱. «آیا می‌توان یک مستطیل ۱۶×۹ را به دو قسمت برید به طوری که از کنار هم گذاشتن آن دو، یک مربع به ضلع ۱۲ حاصل شود؟»

مسلماً اولین چیزی که بررسی خواهید کرد مساحت است. اگر قرار باشد که شکل هندسی P_1 با برش و چینش مجدد به شکل هندسی P_2 تبدیل شود، یک شرط لازم آن است که مساحت‌های P_1 و P_2 برابر باشند. اگر محدودیت تعداد قطعات در برش را حذف کنیم، بسیاری به حل معما دست خواهند یافت، اما شرط بریدن به تنها دو قسمت، معما را کمی دشوار کرده است. اگر ایده‌ای ندارید، شکل(۲) از همان کتاب قدیمی ژاپنی یک راه حل، پیش رویتان قرار می‌دهد.

شکل ۲

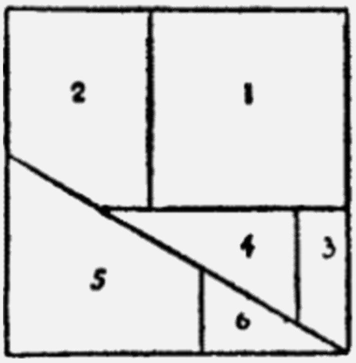
یک نمونهٔ دیگر از این دست مسئله‌ها، معمایی است که در سال ۱۹۰۷ توسط هنری ارنست دیودونه، ریاضیدان انگلیسی، تحت عنوان «سه خانم ژاپنی و یک فرش» مطرح شده است.

مثال ۲. «سه زن ژاپنی، یک فرش باارزش دارند و می‌خواهند آن را بین خود تقسیم کنند. آیا می‌توانند با بریدن فرش به حداکثر شش قسمت و چینش مجدد آن، سه تکهٔ مربع شکل با مساحت یکسان داشته باشند؟ (شکل ۳).»

شکل ۳

تکه دوزی در هندسه!

اگر ایده‌ای برای حل مسئله پیدا نکردید، نیم‌نگاهی به شکل ۴ بیاندازید و محاسبات آن را تکمیل کنید. حال با این مقدمه به سراغ مجردسازی مسئله در هندسه می‌رویم و به یک قضیهٔ مهم در این باره اشاره می‌کنیم.

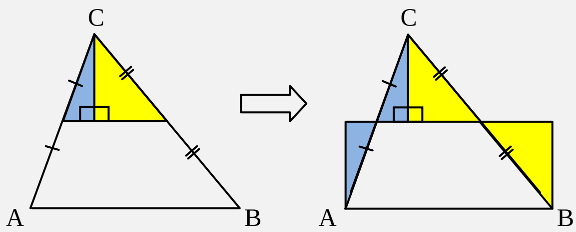


شکل ۴

تعریف ۱. دو شکل هندسی را هم‌ارز برشی[1] می‌نامیم هرگاه بتوان با بریدن شکل اول به تعدادی متناهی شکل کوچکتر و چینش مجدد آنها، به شکل دوم برسیم. به عنوان مثال در مثال ۱، مستطیل به ابعاد ۹×۱۶ با مربعی به ضلع ۱۲، هم‌ارز برشی است.

← مثال ۳. «ثابت کنید هر مثلث با مستطیلی هم‌مساحت با آن، هم‌ارز برشی است.»

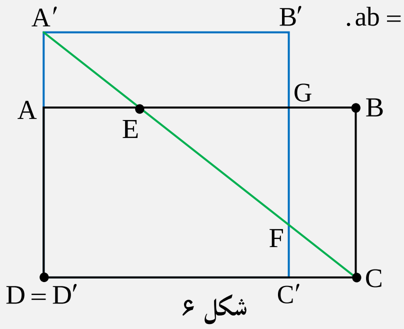
اثبات: کافی است مطابق شکل زیر عمل کنیم. با دو برش می‌توان مثلث ABC را به سه قسمت تقسیم کرد و با جابه‌جایی دو مثلث بالایی مطابق شکل ۵، به یک مستطیل رسید. مستطیل حاصل قاعده‌ای برابر AB و ارتفاعی برابر با نصف ارتفاع مثلث دارد.



شکل ۵

← مثال ۴. «ثابت کنید هر دو مستطیل هم‌مساحت، هم‌ارز برشی هستند.»

اثبات: مستطیل ABCD به ابعاد $a\times b$ و مستطیل $A'B'C'D'$ به ابعاد $c\times d$ را در نظر بگیرید که هم‌مساحت هستند. درنتیجه $ab=cd$.

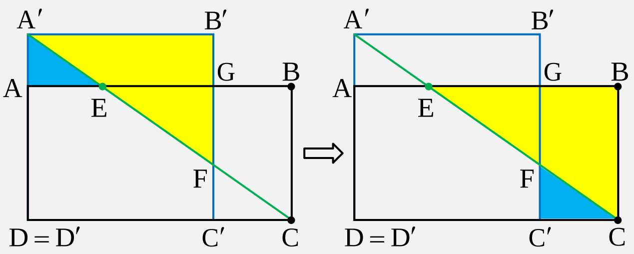


شکل ۶

بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید $a<c$ و $b>d$، در این صورت:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{a}{c}\\[2mm] \dfrac{D'C'}{DC}=\dfrac{d}{b}\\[2mm] ab=cd\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{AD}{A'D'}=\frac{D'C'}{DC}\Rightarrow AC'||A'C$$

از طرفی $A'A||B'C'$. درنتیجه $AA'FC'$ متوازی‌الاضلاع است و بنابراین $AC'=A'F$. به طور مشابه ثابت می‌شود $AC'=EC$. درنتیجه $A'F=EC$. درنتیجه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $A'B'F$ و EBC به حالت وتر و یک زاویهٔ حاده، همنهشتند. درنتیجه مساحت دو چهارضلعی $A'B'GE$ و GBCF برابر است که نتیجه می‌دهد مساحت دو مثلث $A'AE$ و FCC' برابر است. از طرفی این دو مثلث متشابه هستند، درنتیجه دو مثلث $AA'E$ و FCC' همنهشتند و مطابق شکل زیر حکم نتیجه می‌شود.



شکل ۷

حال آماده‌ایم تا یک حکم کلی را نتیجه بگیریم. قضیهٔ زیر در سال ۱۸۳۱ ثابت شده است:

تکه دوزی در هندسه!

قضیهٔ اصلی: هر دو چندضلعی هم‌مساحت، هم‌ارز برشی نیز هستند.

مراحل اثبات: در زیر، مراحل اثبات را ذکر می‌کنیم و اثبات دقیق را به خواننده واگذار می‌کنیم:

(۱) می‌توان به راحتی نشان داد، هم‌ارز برشی بودن، یک رابطهٔ تراگذری (یا تعدی) است. به این معنی که اگر شکل‌های A و B هم‌ارز برشی بودند و اشکال B و C نیز هم‌ارز برشی بودند، آنگاه A و C نیز چنین هستند.

(۲) (مثلث‌بندی) هر n ضلعی را توسط $n-۳$ قطر می‌توان به $n-۲$ مثلث افراز کرد ($n \geq ۳$).

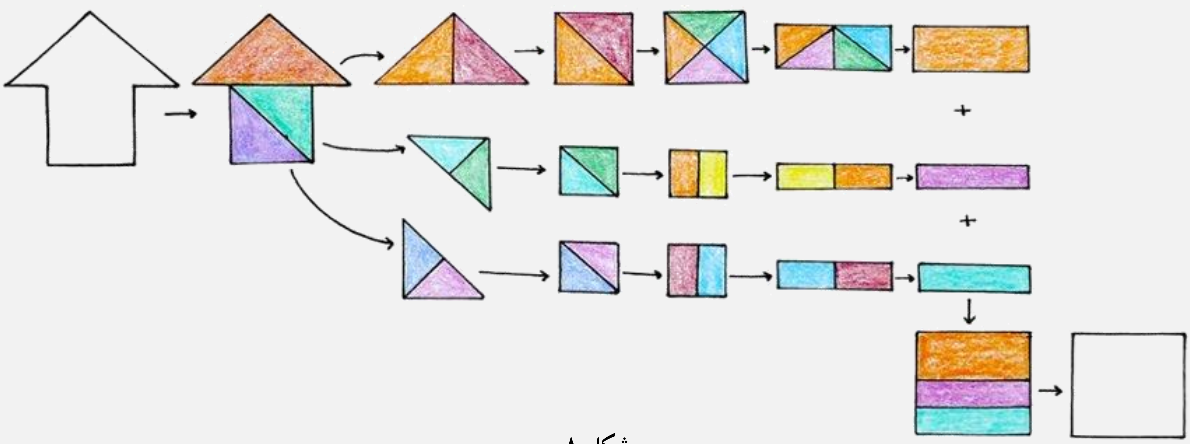
(۳) هر مثلث با یک مستطیل هم‌مساحت، هم‌ارز برشی است.

(۴) هر مستطیل با یک مستطیل که طول یک ضلع آن برابر ۱ است، هم‌ارز برشی است.

درواقع اگر P و Q دو چندضلعی با مساحت S باشند، به کمک مراحل فوق می‌توانید نشان دهید P و Q، هردو با مستطیلی به ابعاد $۱\times S$ هم‌ارز برشی هستند. درنتیجه از خاصیت تعدی بودن رابطهٔ هم‌ارزی برشی، P و Q خود هم‌ارز برشی خواهند بود.

همانطور که در اثبات قضیهٔ اصلی دیدید، مثلث‌بندی یک چندضلعی، نقش مهمی در فرآیند اثبات قضیه داشت. در شماره‌های آینده در این باره مقاله‌ای ارائه خواهد شد.

در شکل زیر، مراحل اثبات هم‌ارزی برشی دو چندضلعی را می‌بینید:



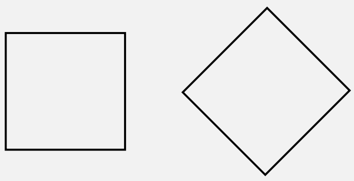
شکل ۸

در ادامه به چند مسئله دربارهٔ هم‌ارزی برشی اشکال هندسی می‌پردازیم:

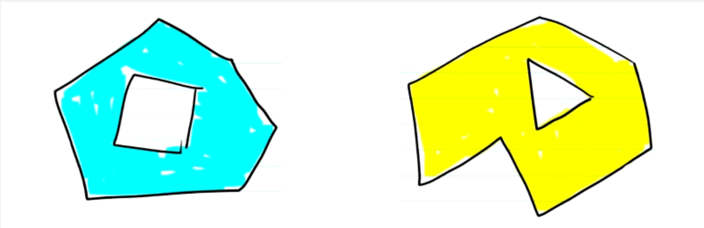
تمرین ۱. یک مربع را با برش و چینش مجدد به دو مربع یکسان تبدیل کنید.

تمرین ۲. یک مستطیل را با کمترین تعداد برش به یک مربع تبدیل کنید.

تمرین ۳. می‌خواهیم با برش مربع سمت چپ و بدون چرخاندن قطعات، با چینش مجدد به مربع سمت راست برسیم. آیا چنین کاری امکان‌پذیر است؟

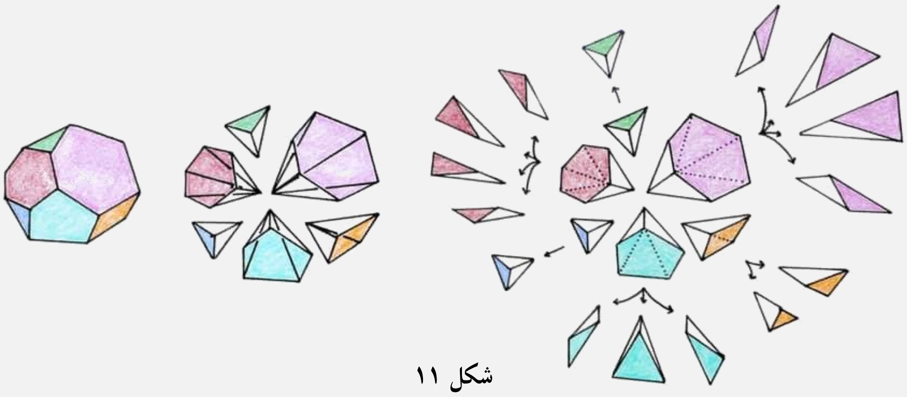


تمرین ۴. دو چندضلعی P و Q را در نظر بگیرید که از داخل هرکدام، ناحیه‌ای به شکل چندضلعی حذف شده است بطوریکه دو شکل حاصل هم مساحت هستند. آیا دو شکل حاصل هم‌ارز برشی هستند؟



شکل ۱۰

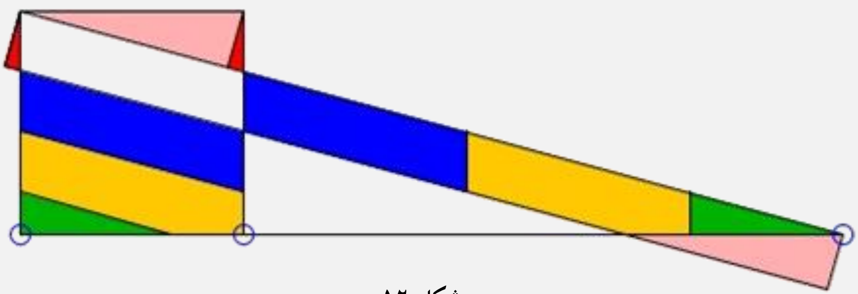
تمرین ۵. ادامهٔ منطقی این مسئله می‌تواند روی حجم‌های هندسی در فضای سه‌بعدی مطرح شود. شکل زیر مثالی از این مطلب است. تفسیر آن به عهدهٔ خوانندهٔ علاقمند!



شکل ۱۱

تمرین ۶. به کمک برش و چینش مجدد قضیهٔ فیثاغورس را اثبات کنید.

تمرین ۷. شکل زیر یک هم‌ارزی برشی را بیان می‌کند. تفسیر شکل به عهدهٔ خواننده!



شکل ۱۲

مراجع :

1. J. Akiyama, K. Matsunaga, Treks into Intuitive Geometry, The World of Polygons and Polyhedra, Springer (2016).
2. K. Lydia, Hilbert's Third Problem (A Story of Threes), https://mitadmissions.org/blogs/entry/hilberts-third-problem-a-story-of-threes

۱. هم‌ارز برشی را به جای Equidecomposable استفاده کرده‌ایم.